

成都市 2022 级高中毕业班第二次诊断性检测

数 学

本试卷满分 150 分,考试时间 120 分钟。

注意事项:

1. 答题前,务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上。
2. 答选择题时,必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦擦干净后,再选涂其它答案标号。
3. 答非选择题时,必须使用 0.5 毫米黑色签字笔,将答案书写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答,在试题卷上答题无效。
5. 考试结束后,只将答题卡交回。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求。

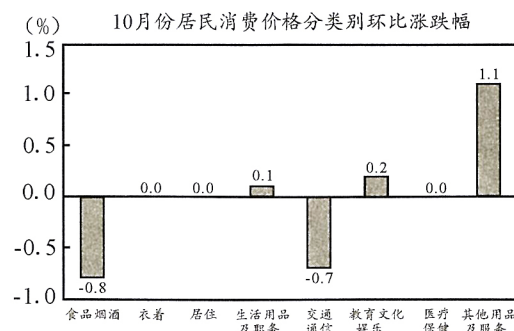
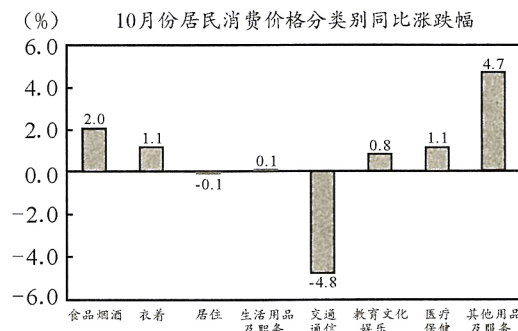
1. 若 $(1-i)z=i$, 则 $z=$

- A. $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ B. $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$ C. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ D. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

2. 已知集合 $A=\{x|x^3<1\}$, $B=\{x|2^x>\frac{1}{2}\}$, 则

- A. $A\cap B=\{x|x<-1\}$ B. $A\cap B=\{x|-1<x<1\}$
C. $A\cup B=\{x|x<-1\}$ D. $A\cup B=\{x|x<1\}$

3. 居民消费价格指数(Consumer Price Index,简称 CPI),是度量一定时期内居民消费商品和服务价格水平总体变动情况的相对数,综合反映居民消费商品和服务价格水平的变动趋势和变动程度.下图是 2024 年 11 月 9 日国家统计局公布的 2024 年 10 月各类商品及服务价格同比和环比涨跌幅情况(同比= $\frac{\text{本期数}-\text{去年同期数}}{\text{去年同期数}}\times 100\%$,环比= $\frac{\text{本期数}-\text{上期数}}{\text{上期数}}\times 100\%$),下列结论正确的是



- A. 2024 年 10 月份食品烟酒类价格低于 2023 年 10 月份食品烟酒类价格
B. 2024 年 10 月份教育文化娱乐类价格低于 2024 年 9 月份教育文化娱乐类价格
C. 2024 年 9 月份医疗保健类价格高于 2023 年 10 月份医疗保健类价格
D. 2024 年 9 月份居住类价格高于 2023 年 10 月份居住类价格

4. 已知两个非零向量 a, b 满足 $|a+b|=|a-b|$, 则向量 $2a-b$ 在向量 a 上的投影向量为
A. b B. $-b$ C. $2a$ D. $-2a$
5. 袋中有 5 个除颜色外完全相同的小球,其中 3 个红球,2 个白球.从袋中不放回地依次随机取出 2 个球,则这 2 个球颜色相同的概率为
A. $\frac{13}{25}$ B. $\frac{12}{25}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{2}{5}$
6. 在天文学中,天体的明暗程度可以用星等或亮度来描述.以织女星的亮度 I_0 为标准,天体的星等 m 与亮度 I 满足 $m=-\frac{5}{2}\lg\frac{I}{I_0}$,已知北极星的星等为 2,牛郎星的星等为 0.8,则北极星与牛郎星的亮度之比为
A. $10^{\frac{5}{2}}$ B. $10^{-\frac{5}{2}}$ C. $10^{\frac{12}{25}}$ D. $10^{-\frac{12}{25}}$
7. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$ 的右焦点为 F ,若 F 关于直线 $y=3x$ 的对称点 P 在 C 上,则双曲线 C 的离心率为
A. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ B. $\sqrt{10}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D. $\sqrt{5}$
8. 若函数 $f(x)=e^{ax}\ln(x+1)$ 有极值,则 a 的取值范围为
A. $(-\infty, 0)\cup(e, +\infty)$ B. $(-\infty, 0)\cup(e^2, +\infty)$
C. $(-\infty, -1)\cup(1, +\infty)$ D. $(-\infty, -1)\cup(\frac{1}{e}, +\infty)$

二、选择题:本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分,部分选对的得部分分,有选错的得 0 分。

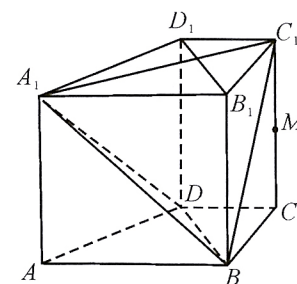
9. 已知函数 $f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{6})$, 则

- A. $f(x)$ 的最小正周期为 π B. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{12}$ 对称
C. $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6})$ 上单调递减 D. $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上有 2 个零点

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=\frac{n-2}{2n-15}$, 前 n 项和为 S_n , 则

- A. 数列 $\{\frac{1}{2a_n-1}\}$ 为等差数列 B. $\exists n\in\mathbf{N}^*$, 使得 $a_{n+1}>a_n$
C. 当 $n=8$ 时, S_n 取得最小值 D. 数列 $\{a_n-a_{n+1}\}$ 的最大项的值为 $\frac{11}{3}$

11. 如图,在直棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB\parallel CD$, $AB\perp BC$, $AB=2CD=2$, $BC=CC_1=\sqrt{2}$, M 是 CC_1 中点. 过 AA_1 作与平面 BDD_1B_1 平行的平面 α , 若 $\alpha\cap$ 平面 $A_1BD=l_1$, $\alpha\cap$ 平面 $A_1BC_1=l_2$, 则
A. A_1, B, M, D_1 四点共面
B. 棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 没有外接球
C. 直线 l_1, l_2 所成的角为 60°
D. 四面体 A_1BC_1D 与四面体 AB_1CD_1 的公共部分的体积为 $\frac{1}{2}$



三、填空题:本题共3小题,每小题5分,共15分。

12. 已知角 θ 的终边过点 $P(3,4)$,则 $\frac{\sin\theta+2\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=\underline{\hspace{2cm}}$.

13. 设函数 $f(x)=2x^3+ax^2+bx$,若 $f(x)$ 的图象过点 $P(1,3)$,且曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,0)$ 处的切线也过点 P ,则 $a=\underline{\hspace{2cm}}$.

14. 对于一个平面图形,如果存在一个圆能完全覆盖住这个平面图形,则称这个图形被这个圆能够完全覆盖,其中我们把能覆盖平面图形的最小圆称为最小覆盖圆. 则曲线 $x^4+y^4-x^2y^2-x^2-y^2=0$ 的最小覆盖圆的半径为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

四、解答题:本题共5小题,共77分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13分)

在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c ,已知 $\sqrt{3}c=2a\sin C$.

(1)求 A ;

(2)若 $a=\sqrt{3}$,且 $\triangle ABC$ 的周长为 $3+\sqrt{3}$,求 b .

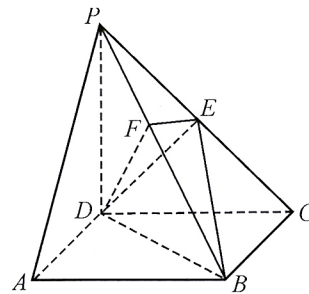
16. (15分)

如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 是正方形,侧棱 $PD\perp$ 底面 $ABCD$, $PD=DC$, E 是 PC 的中点,作 $EF\perp PB$ 交 PB 于点 F .

(1)求证: $PA\parallel$ 平面 EDB ;

(2)求证: $PB\perp$ 平面 EFD ;

(3)求平面 CPB 与平面 PBD 的夹角的大小.



17. (15分)

已知椭圆 C 上的动点 $M(x,y)$ 总满足关系式 $\sqrt{(x+1)^2+y^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2}=2a(a>1)$,且椭圆 C 与抛物线 $\Gamma:y^2=2px(p>0)$ 有共同的焦点 F , P 是椭圆 C 与抛物线 Γ 的一个公共点, $|PF|=\frac{5}{3}$.

(1)求抛物线 Γ 的方程和椭圆 C 的标准方程;

(2)过点 F 的直线 l 交抛物线 Γ 于 M, N 两点,交椭圆 C 于 A, B 两点,若 $|MF|\cdot|NF|=2|AF|\cdot|BF|$,求直线 l 的方程.

18. (17分)

某答题挑战赛规则如下:比赛按轮依次进行,只有答完一轮才能进入下一轮,若连续两轮均答错,则挑战终止;每一轮系统随机地派出一道通识题或专识题,派出通识题的概率为 $\frac{1}{3}$,派出专识题的概率为 $\frac{2}{3}$. 已知某选手答对通识题与专识题的概率分别为 $\frac{3}{5}, \frac{1}{5}$,且各轮答题正确与否相互独立.

(1)求该选手在一轮答题中答对题目的概率;

(2)记该选手在第 n 轮答题结束时挑战依然未终止的概率为 p_n ,

(i)求 p_3, p_4 ;

(ii)证明:存在实数 λ ,使得数列 $\{p_{n+1}-\lambda p_n\}$ 为等比数列.

19. (17分)

对于给定集合 $A\subseteq\{(a,b)|a\geq 0, b\geq 0\}$,若存在非负实数 K_1, K_2 ,对任意的 $(a,b)\in A$ 满足: $K_1(1+a^2)(1+b^2)\leq (a+b)(1+ab)\leq K_2(1+a^2)(1+b^2)$ 成立,则称集合 A 具有性质 (K_1, K_2) .

(1)证明:集合 $\{(a,b)|a\geq 0, b=1\}$ 具有性质 $(\frac{1}{2}, 1)$;

(2)若集合 $\{(a,b)|a\geq 0, b\geq 0, a+b=1\}$ 具有性质 (K_1, K_2) ,求 K_2-K_1 的最小值;

(3)若集合 $\{(a,b)|a\geq 0, b\geq 0, a^3+b^3=2\}$ 具有性质 (K_1, K_2) ,求 $\frac{K_1}{K_2}$ 的最大值.