

成都市 2022 级高中毕业班摸底测试

数学参考答案及评分意见

一、选择题:(每小题 5 分,共 40 分)

1. C; 2. A; 3. B; 4. D; 5. C; 6. A; 7. C; 8. B.

二、选择题:(每小题 6 分,共 18 分)

9. ABD; 10. ACD; 11. AC.

三、填空题:(每小题 5 分,共 15 分)

12. e; 13. 60, 24; 14. 333.

四、解答题:(共 77 分)

15. 解:(I)连接 BD , 设 $AC \cap BD = O$, 连接 EO , 则 O 为 BD 中点.1 分

在 $\triangle BDD_1$ 中, 因为 O, E 为中点, 所以 $OE \parallel BD_1$3 分

又因为 $BD_1 \not\subset$ 平面 ACE , $OE \subset$ 平面 ACE ,

所以 $BD_1 \parallel$ 平面 ACE5 分

(II) 以 D 为坐标原点, DA, DC, DD_1 所在直线分别为 x, y, z 轴建立如图所示的空间直角坐标系.

设正方体棱长为 2,

则 $A(2, 0, 0), C(0, 2, 0), E(0, 0, 1), C_1(0, 2, 2)$,

$\overrightarrow{AC_1} = (-2, 2, 2)$7 分

设 $\mathbf{m} = (x, y, z)$ 为平面 ACE 的一个法向量, 由 $\overrightarrow{AC} = (-2, 2, 0), \overrightarrow{AE} = (-2, 0, 1)$, 得

$$\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AC} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AE} = 0. \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} -2x + 2y = 0, \\ -2x + z = 0. \end{cases} \quad \text{令 } x = 1 \text{ 得 } \mathbf{m} = (1, 1, 2). \quad \dots\dots 10 \text{ 分}$$

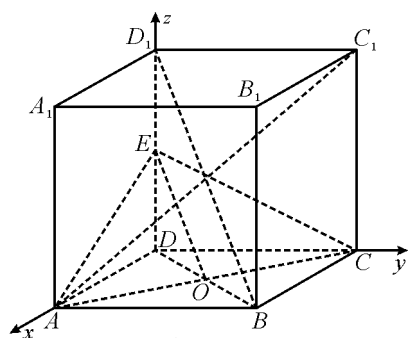
设 AC_1 与平面 ACE 所成角大小为 θ , 则

$$\sin \theta = |\cos \langle \mathbf{m}, \overrightarrow{AC_1} \rangle| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AC_1}|}{|\mathbf{m}| \cdot |\overrightarrow{AC_1}|} = \frac{\sqrt{2}}{3}. \quad \dots\dots 12 \text{ 分}$$

所以 AC_1 与平面 ACE 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$13 分

16. 解:(I) 由 $a_4 = 7, a_{2n} = 2a_n + 1$, 令 $n = 2$ 得 $a_2 = 3$2 分

设 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,



因为 $a_4 = a_2 + 2d$, 所以 $d = 2$4 分

所以 $a_n = a_2 + (n-2)d = 2n-1$.

故 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n-1$6 分

(II) 由(I)知 $b_n = (2n-1) \cdot 3^n$7 分

$$S_n = 1 \times 3^1 + 3 \times 3^2 + \cdots + (2n-1) \cdot 3^n, \textcircled{1}$$

$$3S_n = 1 \times 3^2 + \cdots + (2n-3) \cdot 3^n + (2n-1) \cdot 3^{n+1}, \textcircled{2} \quad \text{.....10 分}$$

①-②得

$$-2S_n = 3^1 + 2 \times 3^2 + \cdots + 2 \times 3^n - (2n-1) \cdot 3^{n+1} = 3 + \frac{18(1-3^{n-1})}{1-3} - (2n-1) \cdot 3^{n+1},$$

.....13 分

$$\text{化简得 } -2S_n = -6 - (2n-2) \cdot 3^{n+1}.$$

.....14 分

$$\text{所以 } S_n = 3 + (n-1) \cdot 3^{n+1}.$$

.....15 分

17. 解:(I) 设事件 A_1 = “成都蓉城队主场与 A 队比赛获得积分为 3 分”,

事件 A_2 = “成都蓉城队主场与 A 队比赛获得积分为 1 分”,

事件 A_3 = “成都蓉城队主场与 A 队比赛获得积分为 0 分”,

事件 B_1 = “成都蓉城队客场与 B 队比赛获得积分为 3 分”,

事件 B_2 = “成都蓉城队客场与 B 队比赛获得积分为 1 分”,

事件 B_3 = “成都蓉城队客场与 B 队比赛获得积分为 0 分”,

事件 C = “成都蓉城队七月主场与 A 队比赛获得积分超过客场与 B 队比赛获得积分”.

$$\text{则 } P(C) = P(A_1B_2) + P(A_1B_3) + P(A_2B_3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{11}{24}.$$

所以成都蓉城队七月主场与 A 队比赛获得积分超过客场与 B 队比赛获得积分的概率为 $\frac{11}{24}$5 分

(II) 由题意可知 X 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3, 4, 6,

$$P(X=0) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{24}, \quad P(X=1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6},$$

$$P(X=2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}, \quad P(X=3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6},$$

$$P(X=4) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}, \quad P(X=6) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}. \quad \text{.....11 分}$$

所以 X 的分布列为:

X	0	1	2	3	4	6
P	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$

.....12 分

$$\text{所以 } X \text{ 的期望 } E(X) = 0 \times \frac{1}{24} + 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{3} + 6 \times \frac{1}{8} = \frac{37}{12}.$$

.....15 分

18. 解: (I) 因为直线 AB 的倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$, 所以 $k_{AB} = 1$.

.....1 分

由题意, 抛物线 E 的焦点 F 坐标为 $(0, \frac{p}{2})$.

.....2 分

所以直线 AB 的方程为 $y = x + \frac{p}{2}$.

.....3 分

因为圆的方程为 $x^2 + y^2 - 4y = 0$, 即 $x^2 + (y - 2)^2 = 4$,

所以圆心坐标为 $(0, 2)$, 半径为 2.

.....4 分

$$\text{所以圆心到直线 } AB \text{ 的距离 } d = \frac{\left| 2 - \frac{p}{2} \right|}{\sqrt{2}}.$$

.....5 分

由垂径定理得 $d^2 + \left(\frac{\sqrt{14}}{2} \right)^2 = 4$, 解得 $p = 2$ 或 $p = 6$.

故 $p = 2$ 或 $p = 6$.

.....7 分

(II) 由题意, 直线 AB 斜率存在,

设直线 $AB: y = kx + \frac{p}{2}$, $A\left(x_1, \frac{x_1^2}{2p}\right)$, $B\left(x_2, \frac{x_2^2}{2p}\right)$,

$$\text{由 } \begin{cases} y = kx + \frac{p}{2} \\ x^2 = 2py \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 得 } x^2 - 2kpx - p^2 = 0,$$

$$\Delta = 4p^2(k^2 + 1) > 0.$$

$$x_1 + x_2 = 2kp, x_1 x_2 = -p^2.$$

.....9 分

故 AB 中点 M 坐标为 $\left(kp, k^2p + \frac{p}{2}\right)$, 设 $C(t, 0)$,

.....10 分

由 $CM \perp AB$ 得 $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$,

$$\text{即 } (kp - t) \times 1 + \left(k^2p + \frac{p}{2}\right) \cdot k = 0, \text{ 整理得 } \frac{3kp}{2} + k^3p - t = 0. \text{ ①}$$

.....12 分

$$\text{由 } CA \perp CB \text{ 得 } \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = (x_1 - t)(x_2 - t) + \frac{x_1^2 x_2^2}{4p^2} = 0,$$

$$\text{即 } x_1 x_2 - t(x_1 + x_2) + t^2 + \frac{x_1^2 x_2^2}{4p^2} = 0,$$

$$\text{代入整理得 } t^2 - 2kpt - \frac{3p^2}{4} = 0. \text{ ②}$$

.....14 分

由①②消去 t 得 $k^2 p^2 \left(k^2 + \frac{3}{2}\right)^2 - 2k^2 p^2 \left(k^2 + \frac{3}{2}\right) - \frac{3}{4} p^2 = 0$,

即 $4k^2 \left(k^2 + \frac{3}{2}\right)^2 - 8k^2 \left(k^2 + \frac{3}{2}\right) - 3 = 0$,

整理得 $(k^2 + 1)(k^4 - \frac{3}{4}) = 0$15 分

所以 $k^4 = \frac{3}{4}$, 解得 $k = \pm \frac{\sqrt[4]{12}}{2}$.

综上, 直线 AB 的斜率 $k = \pm \frac{\sqrt[4]{12}}{2}$17 分

19. 解: (I) 当 $a = 2$ 时, $f(x) = 2x - \ln(x+2) (x > -2)$,

$f'(x) = 2 - \frac{1}{x+2} = \frac{2x+3}{x+2}$2 分

故当 $x \in \left(-2, -\frac{3}{2}\right)$, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in \left(-\frac{3}{2}, +\infty\right)$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.

综上, $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left(-2, -\frac{3}{2}\right)$, 单调递增区间为 $\left(-\frac{3}{2}, +\infty\right)$4 分

(II) 由题意, $a \neq 0$.

$f'(x) = a - \frac{1}{x+a} = \frac{ax+a^2-1}{x+a} (x > -a)$5 分

① 当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-a, +\infty)$ 单调递减,

由 $x \rightarrow +\infty$, $f(x) \rightarrow -\infty$, 不合题意;6 分

② 当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $\left(-a, \frac{1}{a} - a\right)$ 单调递减, $\left(\frac{1}{a} - a, +\infty\right)$ 单调递增.

.....7 分

由 $f(x) \geq a - \frac{1}{a}$ 恒成立, 得 $f(x)_{\min} \geq a - \frac{1}{a}$.

$f(x)_{\min} = f\left(\frac{1}{a} - a\right) = 1 - a^2 - \ln\left(\frac{1}{a} - a + a\right) = 1 - a^2 + \ln a \geq a - \frac{1}{a}$.

即 $1 - a^2 + \ln a - a + \frac{1}{a} \geq 0$.

令 $g(a) = 1 - a^2 + \ln a - a + \frac{1}{a}$,

$g'(a) = -2a + \frac{1}{a} - 1 - \frac{1}{a^2} = \frac{-2a^3 + a - a^2 - 1}{a^2} = \frac{-2a^3 - (a^2 - a + 1)}{a^2} < 0$ 恒成立,

所以 $g(a)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减, 且 $g(1) = 0$9 分

故当 $a \in (0, 1]$, $g(a) \geq 0$, 符合题意,

当 $a \in (1, +\infty)$, $g(a) < 0$, 不合题意.

综上, a 的取值范围为 $(0, 1]$.

……10 分

(Ⅲ) 由 $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{n^2}{n^2 a_n + 1}$,

得 $a_2 = \frac{1}{2}$, 且 $a_n > 0$.

由 (Ⅱ) 可知, 令 $a = 1$, 有 $x \geq \ln(x+1)$ 可得 $\ln x \leq x - 1$,

令 $x = \frac{1}{t}$ 可得 $\ln \frac{1}{t} \leq \frac{1}{t} - 1$ 即 $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$.

……12 分

由 $a_{n+1} = \frac{n^2}{n^2 a_n + 1}$ 得 $a_{n+1} = \frac{1}{a_n + \frac{1}{n^2}}$ 即 $\frac{1}{a_{n+1}} = a_n + \frac{1}{n^2}$.

两边取对数得 $\ln \frac{1}{a_{n+1}} = \ln \left(a_n + \frac{1}{n^2} \right)$, 由上述不等式得

$\ln \frac{1}{a_{n+1}} \geq 1 - \frac{1}{\frac{1}{a_{n+1}}} = 1 - a_{n+1}$, $\ln \left(a_n + \frac{1}{n^2} \right) \leq a_n + \frac{1}{n^2} - 1$,

于是 $1 - a_{n+1} \leq a_n + \frac{1}{n^2} - 1$,

所以 $a_{n+1} + a_n \geq 2 - \frac{1}{n^2}$.

……14 分

当 $n = 1$ 时, $S_2 = a_1 + a_2 = \frac{3}{2} > 1 = 2 \times 1 - 1$, 不等式成立;

当 $n \geq 2$ 时,

$S_{2n} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{2n-1} + a_{2n}$

$\geq \frac{3}{2} + 2 - \frac{1}{3^2} + 2 - \frac{1}{5^2} + \cdots + 2 - \frac{1}{(2n-1)^2}$

$= \frac{3}{2} + 2(n-1) - \left[\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} \right]$

$> 2n - \frac{1}{2} - \left[\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-3)(2n-1)} \right]$

$= 2n - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1} \right)$

$= 2n - 1 + \frac{1}{2(2n-1)} > 2n - 1$. 即当 $n \geq 2$ 时, 不等式成立.

综上, $S_{2n} > 2n - 1$ 得证.

……17 分